Notions de résolution d'équations différentielles

1. Introduction

Cette activité a pour but de donner des notions pour résoudre des équations différentielles utilisées en sciences physiques (en cinétique, en électricité, en mécanique, en radioactivité …). Cette activité ne remplacera jamais un « vrai » cours de mathématique qui utilisera toute la rigueur et le vocabulaire nécessaire.

Pour faire simple, une équation différentielle est une équation qui « mélange » une fonction et ses dérivées. L'ordre n de l'équation est défini par la n$^{\text{ième}}$ dérivée.

Exemple : ay' + by + c = 0 est une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre car il n'y a que la dérivée première.

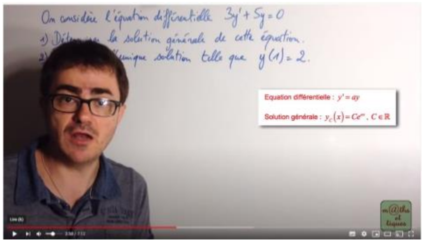
ay'' + by' + cy + d = 0 est une équation différentielle du 2$^{\text{nd}}$ ordre (dérivée seconde y'').

Ensuite on dit « avec » ou « sans » « second membre » tout simplement s'il y a un terme sans la fonction.

Exemple : ay' + by + c = 0 est une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre avec 2$^{\text{nd}}$ membre (le terme c).

ay' + by = 0 est une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre sans 2$^{\text{nd}}$ membre (il n'y a que des termes avec la fonction y).

2. Equation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre sans second membre



Pour un complément d'informations, voir la vidéo d'Yvan Monka (7 minutes 12) : https://www.youtube.com/watch?v=YJNHTq85tJA

A retenir :

Equation différentielle : $y' = ay$

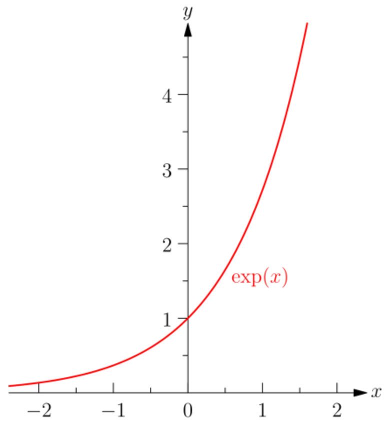
Solution générale : $y_C(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$

Pour trouver la constante C, on utilise une condition initiale.

2.1. Application en mathématiques

Trouver la solution de l'équation **y' + 2y = 0** avec la condition initiale y(0) = 3

2.2. Applications en sciences physiques



En mathématiques on va définir une fonction **f par rapport à x** : f(x). Pour en faire ensuite une représentation graphique où y = f(x) définit y comme l'axe des ordonnées et x l'axe des abscisses. Exemple : $f(x) = e^x$

En sciences physiques nous étudions de nombreuses grandeurs en **fonction du temps t**. Ainsi les grandeurs ne dépendent pas de x mais de t :

- position : x(t) ou y(t) ou z(t) ;
- vitesse : v(t) ;
- accélération : a(t) ;
- concentration d'un réactif : [R](t) ou d'un produit : [P](t) ;
- nombre de noyaux radioactifs : N(t) ;
- intensité électrique : i(t) ;
- tension électrique : u(t) ;
- …

Par ailleurs, en mathématiques on écrit souvent une dérivée avec le « prime » ' : f'(x), y', … mais on aurait pu l'écrire sous la forme $\frac{d}{dx}f(x)$ qui signifie dérivée de f par rapport à x.

En sciences physiques on utilise cette notation et donc on écrira : $\frac{dx}{dt}$ ou $\frac{dy}{dt}$ ou $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{di}{dt}$...

2.2.1. En cinétique

On a vu que dans une transformation chimique la concentration d'un réactif R suit une loi de vitesse d'ordre 1 si sa vitesse de disparition est proportionnelle à sa concentration : $-\frac{d[R]}{dt} = k \times [R]$

[R] est une fonction du temps.

k est le facteur de proportionnalité

Application :

Lors d'une transformation, la concentration du pentoxyde d'azote $[N_2O_5]$ suit une loi de vitesse d'ordre 1 dont le facteur de proportionnalité k vaut : $k = 6 \times 10^{-3}$. On sait également que la concentration initiale était de $[N_2O_5]_i = 2{,}35$ $mol.L^{-1}$.

1. Déterminer l'équation de la concentration du pentoxyde d'azote en fonction du temps : $[N_2O_5](t)$.
2. Tracer la courbe (calculatrice, tableur – grapheur) pour t de 0 à 1 000 s.
3. Déterminer le temps de demi-réaction.

2.2.2. En radioactivité

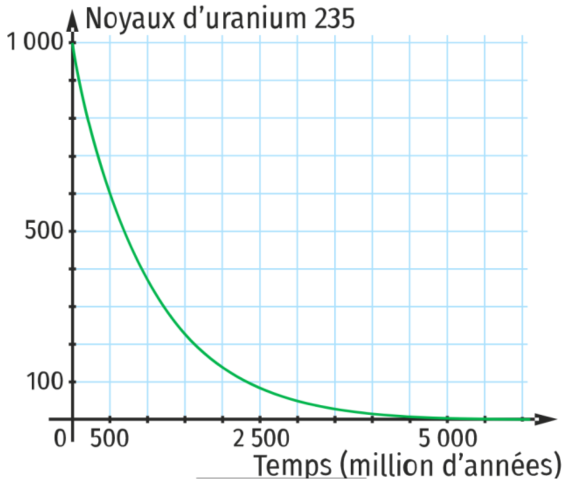
Nous verrons que le nombre de noyaux radioactifs N d'un échantillon va décroître en fonction du temps en suivant également une loi de vitesse d'ordre 1. Ainsi : $\frac{d\,[N]}{dt} = -\lambda \times [N]$ [N] est une fonction du temps.

λ est appelée constante radioactive et peut être déterminée par le temps de demi-vie (identique au temps de demi-réaction) par la relation : $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$.

Application :

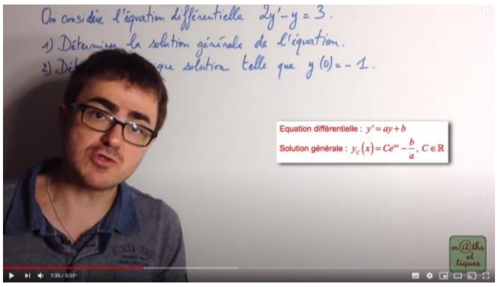
Voici la courbe de décroissance radioactive d'un échantillon de noyaux d'uranium 235.

Déterminer l'équation du nombre de noyaux en fonction du temps : [N](t).



3. Equation différentielle du 1^er^ ordre avec second membre constant

Pour un complément d'informations, voir la vidéo d'Yvan Monka (5 minutes 33) :
https://www.youtube.com/watch?v=CFZr44vny3w



A retenir :

Equation différentielle : $y' = ay + b$

Solution générale : $y_C(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a},\ C \in \mathbb{R}$

Pour trouver la constante C, on utilise une condition initiale.

3.1. Application en mathématiques

Trouver la solution de l'équation **10 y' + y - 5 = 0** avec la condition initiale y(0) = 0.

3.2. Application en sciences physiques

On peut montrer que dans un circuit RC, la tension aux bornes d'un condensateur vérifie l'équation :

$E = RC\,\frac{du_c}{dt} + u_c$ u_c est une fonction du temps : $u_c(t)$

En prenant R=10 kΩ, C=1 000 µF, E=5V et $u_c(0) = 0$, déterminer l'équation de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.